

**Kernfach Mathematik**

---

*Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.*

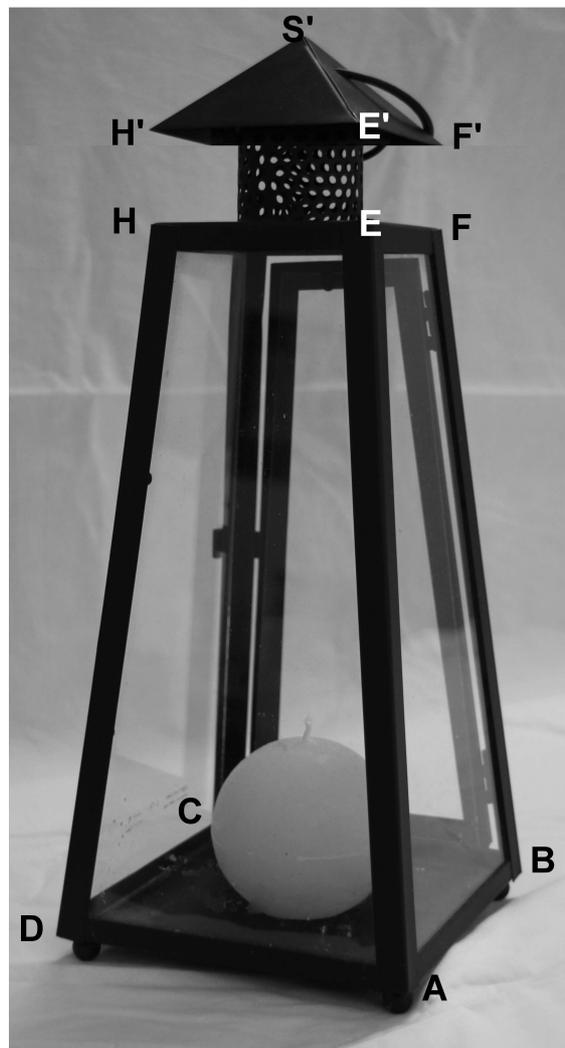
**Aufgabe 3: Analytische Geometrie**

Das Modell einer Gartenlaterne kann als Stumpf einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit einem aufgesetzten Zylinder und einer darüber angebrachten, ebenfalls regelmäßigen quadratischen Pyramide aufgefasst werden.

Die Eckpunkte der Grundfläche des Pyramidenstumpfes sind  $A(4 | 4 | 0)$ ,  $B(-4 | 4 | 0)$ ,  $C(-4 | -4 | 0)$  und  $D(4 | -4 | 0)$ .

Die Eckpunkte der Deckfläche des Pyramidenstumpfes sind  $E(1 | 1 | 12)$ ,  $F(-1 | 1 | 12)$ ,  $G(-1 | -1 | 12)$  und  $H(1 | -1 | 12)$ .

Materialstärken sind bei der Modellierung nicht zu berücksichtigen.



**Kernfach Mathematik**

---

- a) • Berechnen Sie den Schnittpunkt  $S$  der Geraden  $g$  durch die Punkte  $A$  und  $E$  mit der Geraden  $h$  durch die Punkte  $B$  und  $F$ .
- Erstellen Sie eine Koordinatenform der Ebene  $E_1$ , in der die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $E$  liegen. [Zur Kontrolle:  $E_1 : 4x_2 + x_3 = 16$ ]
  - Die Ebene  $E_2$ , in der die Punkte  $A$ ,  $D$  und  $E$  liegen, ist gegeben durch  $E_2 : 4x_1 + x_3 = 16$ . Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels  $\varphi$  zwischen der Ebene  $E_1$  und der Ebene  $E_2$ .
- (11 P)
- b) • Der Materialbedarf an Glas soll abgeschätzt werden. Berechnen Sie die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes.
- Die aufgesetzte regelmäßige quadratische Pyramide schützt das Innere der Laterne vor Regenwasser. Die Grundfläche  $E'F'G'H'$  dieser Pyramide ist gegeben durch die um 1 LE senkrecht nach oben verschobenen Eckpunkte der Deckfläche des Pyramidenstumpfes. Die Spitze dieser Aufsatzpyramide ist der Punkt  $S'(0 | 0 | 15)$ . Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieser Aufsatzpyramide.
- (12 P)
- c) • Die Gerade  $k$  verläuft durch den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $\overline{CD}$  und schneidet die Ebene  $E_1$  orthogonal. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes  $K$  von  $k$  mit  $E_1$ . [Zur Kontrolle:  $K(0 | \frac{60}{17} | \frac{32}{17})$ ]
- Betrachtet werden nun alle Geraden, die durch den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $\overline{CD}$  verlaufen und die Ebene  $E_1$  unter einem Winkel von  $85^\circ$  schneiden. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene  $E_1$  liegen auf einem Kreis. Bestimmen Sie den Radius dieses Kreises.
- (8 P)
- d) Eine kugelförmige Kerze soll so im Innenraum der Gartenlaterne positioniert werden, dass sie die Grundfläche des Pyramidenstumpfes berührt.
- Untersuchen Sie, ob eine Kerze mit dem Radius 3 LE in den Innenraum passt.
  - Bestimmen Sie, wie groß der Radius einer Kugelkerze höchstens sein darf, damit diese innerhalb des Pyramidenstumpfes positioniert werden kann.
- (9 P)