Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 2: Analysis

Die Pegelhöhe eines Kanals wurde während eines Hochwasserereignisses an einem Ort für einen Zeitraum von 14 Tagen beobachtet. Der zeitliche Verlauf der Pegelhöhe kann näherungsweise durch die Funktion h mit

$$h(t) = \tfrac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2} + 4 \quad ; \, t \in [\,0\,;\,14]$$

beschrieben werden. Diese hat die Ableitungen

$$h'(t) = -\tfrac{1}{6} \cdot (t-8) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2} \qquad \text{und}$$

$$h''(t) = \left(\tfrac{1}{54}\,(t-8)^2 - \tfrac{1}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2}.$$

Die Pegelhöhe h wird vom tiefsten Punkt des Kanalbetts bis zur Wasseroberfläche gemessen, t steht für die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Tagen und $h(t)$ für die Pegelhöhe in Metern.

a)
- Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Pegelhöhe im Intervall $[\,0\,;\,3]$.
- Leiten Sie aus der ersten Ableitung der Funktion h deren zweite Ableitung her.
- Berechnen Sie die höchsten und die niedrigsten Pegelhöhen im Beobachtungszeitraum.
- Berechnen Sie die beiden Wendestellen der Funktion h und erläutern Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Wendestellen muss nicht betrachtet werden.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h.

(19 P)

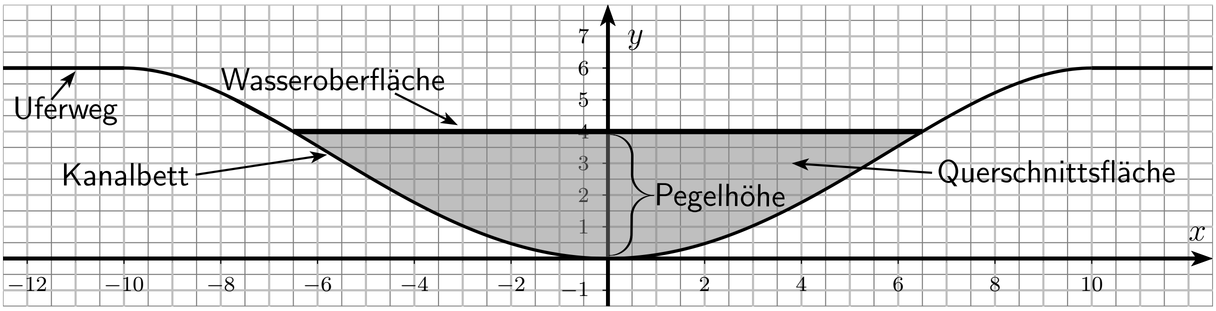
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners den Ausdruck

$$\frac{1}{14} \int_0^{14} h(t)\,\mathrm{d}t$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3 P)

Das achsensymmetrische Kanalbett kann über dem Intervall $[-10; 10]$ näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f modelliert werden. In jedem der Punkte $(-10|6)$ und $(10|6)$ schließt sich jeweils ein horizontaler Uferweg knickfrei an. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei in der Mitte des Kanals im tiefsten Punkt des Kanalbettes.



c) • Entscheiden Sie, welche Werte für den Grad k der Funktion f gewählt werden können. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit $f(x) = -0{,}0006 \cdot x^4 + 0{,}12 \cdot x^2$.
Die normale Pegelhöhe des Kanals beträgt $4\,\mathrm{m}$.

- Zeigen Sie, dass die Breite der Wasseroberfläche des Kanals bei normaler Pegelhöhe ca. $13\,\mathrm{m}$ beträgt.
- Bei normaler Pegelhöhe hat die wassergefüllte (in der Abbildung grau hinterlegte) Querschnittsfläche des Kanals einen Flächeninhalt von ca. $32{,}81\,\mathrm{m}^2$. Bei einer Pegelhöhe von $5{,}5\,\mathrm{m}$ ist die Wasseroberfläche des Kanals ca. $16{,}87\,\mathrm{m}$ breit.
  Ermitteln Sie, um wie viel Prozent sich der Flächeninhalt der wassergefüllten Querschnittsfläche des Kanals vergrößert, wenn der Pegel von normaler Pegelhöhe bis auf die Pegelhöhe von $5{,}5\,\mathrm{m}$ ansteigt.

(14 P)

d) Es gibt eine Funktion b, die jedem Zeitpunkt t des Beobachtungszeitraums eine Breite der Wasseroberfläche des Kanals zuordnet. Dabei wird die Breite in Metern betrachtet.
Zeigen Sie, dass

$$b(t) = 2 \cdot \sqrt{100 - \sqrt{10000 - \frac{h(t)}{0{,}0006}}}$$

ein Funktionsterm dieser Funktion b ist.

(4 P)