Inhaltsverzeichnis

Analysis **15**

1 Grundlagen **16**
1.1 Mengensymbole 16
1.2 Bruchrechnen 16
1.3 Binomische Formeln 17
1.4 Potenzgesetze 18
1.5 Logarithmengesetze 19

2 Gleichungen **20**
2.1 Quadratische Gleichungen 20
2.2 Biquadratische Gleichungen 22
2.3 Nullprodukte 24
2.4 Gleichungen mit „x in jedem Summanden“ 25
2.5 Exponentialgleichungen 26
2.6 Wurzelgleichungen 29
2.7 Logarithmische Gleichungen 30
2.8 Bruchgleichungen 31
2.9 Newtonsches Näherungsverfahren 32
2.10 Gemischte Gleichungen 34

3 Funktionen **36**
3.1 Potenzfunktionen 36
3.2 Ganzrationale Funktionen 39
3.3 Gebrochenrationale Funktionen 41
3.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen 46
3.5 Trigonometrische Funktionen 48
3.6 Wurzelfunktionen 51
3.7 Zusammengesetzte Funktionen 52

4 Ableitung **55**
4.1 Ableitungsregeln 55
4.2 Bedeutung der Ableitung 64
4.3 Graphisches Ableiten 66
4.4 Schnittwinkel von Funktionen 70

5 Kurvendiskussion **72**
5.1 Übersicht Kurvendiskussion 72
5.2 Definitionsbereich 72
5.3 Schnittpunkte mit der x-Achse 74
5.4 Schnittpunkt mit der y-Achse 76
5.5 Symmetrie 78
5.6 Monotonie und Extrempunkte 81
5.7 Krümmung und Wendepunkte 88
5.8 Verhalten im Unendlichen 95
5.9 Zeichnen von Funktionengraphen 99

6 Tangenten **107**
6.1 Tangente an einen Kurvenpunkt . . . 107
6.2 Tangente mit gegebener Steigung . . . 108
6.3 Normale . . . 109

7 Die Umkehrfunktion **112**
7.1 Existenz einer Umkehrfunktion . . . 112
7.2 Bestimmung der Umkehrfunktion . . . 113

8 Integration **114**
8.1 Grundlagen . . . 114
8.2 Integrationsregeln . . . 115
8.3 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte . . . 118
8.4 Integralfunktionen . . . 122

9 Besondere Aufgabentypen **124**
9.1 Extremwertaufgaben . . . 124
9.2 Steckbriefaufgaben . . . 126
9.3 Scharen . . . 128
9.4 Wachstum . . . 130

10 Umfangreiche Aufgaben **132**
10.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben . . . 132
10.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln . . . 133

Geometrie **143**

11 Grundlagen der Vektorrechnung **144**
11.1 Lineare Gleichungssysteme . . . 144
11.2 Rechnen mit Vektoren . . . 146

12 Geometrische Objekte **153**
12.1 Geraden . . . 153
12.2 Ebenen . . . 154
12.3 Zeichnen geometrischer Objekte . . . 160

13 Lagebeziehungen und Schnitt **163**
13.1 Lagebeziehung Gerade-Gerade . . . 163
13.2 Schnitt Gerade-Gerade . . . 164
13.3 Lagebeziehung Gerade-Ebene . . . 165
13.4 Schnitt Gerade-Ebene . . . 166
13.5 Lagebeziehung Ebene-Ebene . . . 167
13.6 Schnitt Ebene-Ebene . . . 168
13.7 Schnittwinkel . . . 170

14 Abstand **172**
14.1 Abstand Punkt-Punkt . . . 172
14.2 Abstand Punkt-Gerade . . . 172
14.3 Abstand Punkt-Ebene . . . 173
14.4 Abstand Gerade-Ebene . . . 174
14.5 Abstand Ebene-Ebene . . . 175
14.6 Abstand Gerade-Gerade . . . 176

14.7 Kugelprobleme . . . 178

15 Konstruktionsprobleme **182**
15.1 Spiegelung . . . 182
15.2 Schattenpunkte . . . 185

16 Umfangreiche Aufgaben **187**
16.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben . . . 187
16.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln . . . 187

Stochastik **195**

17 Wichtige Grundbegriffe **196**
17.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum . . . 196
17.2 Laplace-Experimente . . . 198
17.3 Vereinigung und Schnitt von Ereignissen . . . 199
17.4 Stochastische Unabhängigkeit . . . 201
17.5 Die Vierfeldertafel . . . 202
17.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . 203

18 Mehrstufige Wahrscheinlichkeiten **206**
18.1 Baumdiagramme . . . 206
18.2 Kombinatorische Abzählverfahren . . . 208

19 Zufallsvariablen **212**
19.1 Grundbegriffe . . . 212
19.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung . . . 213
19.3 Histogramme . . . 216

20 Binomialverteilung **218**
20.1 Bernoulli–Ketten . . . 218
20.2 Kumulierte Binomialverteilung . . . 220
20.3 3M-Aufgaben . . . 223

21 Hypergeometrische Verteilung **224**

22 Hypothesentest **225**
22.1 Grundidee . . . 225
22.2 Testen von Hypothesen . . . 226

23 Umfangreiche Aufgaben **234**
23.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben . . . 234
23.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln . . . 234

Lösungen **245**

2 Gleichungen

2.1 Quadratische Gleichungen

Quickstart quadratische Gleichung

- ➤ BEISPIEL: $5x^2 + 7x + 16 = 0$
- ERKENNUNGSMERKMAL: Es kommen x^2, x und Zahlen / Konstanten vor
- LÖSUNGSMETHODE: Mitternachtsformel

2.1.1 Erkennen von quadratischen Gleichungen

Was ist eine quadratische Gleichung?

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

für $a \neq 0$, $b,c \in \mathbb{R}$.
In einer quadratischen Gleichung kommen nur x^2, x und Zahlen / Konstanten vor.

Beispiel: Es wird untersucht, ob folgende Gleichung eine quadratische Gleichung ist:

$$7x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Die Gleichung ist eine quadratische Gleichung, denn es kommen nur die x^2, x und Zahlen / Konstanten vor.

Aufgabe 5

Untersuche, ob folgende Gleichungen quadratische Gleichungen sind:

(a) $7x^2 + 8x - 10 = 0$

(b) $3x^2 + 3x = 21$

(c) $3x^2 + 3x = 21e^x$

(d) $5x^2 + 17x + x^3 = x^3$

2.1.2 Lösen von quadratischen Gleichungen

Mitternachtsformel (a-b-c-Formel)

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

können mit der Mitternachtsformel (a-b-c-Formel) berechnet werden:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Rezept zum Lösen einer quadratischen Gleichung

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung:

$$x^2 - 4x + 6 = 3.$$

Schritt 1: Alles auf eine Seite bringen:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Schritt 2: Lösungen mithilfe der Mitternachtsformel berechnen. Es gelten:

$$a = 1, \quad b = -4 \quad \text{und} \quad c = 3$$

und damit:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathcal{L} = \{1; 3\}$.

Aufgabe 6 Abi★★

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

(b) $3x^2 - 2x + 8 = 0$

(c) $x^2 - x = -\frac{1}{4}$

(d) $x^2 + \sqrt{8}x = -2$

Aufgabe 7 – Abi★★★

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = x^2 - 24 \quad \text{und} \quad g(x) = 3x^2 - 14x.$$

Berechne die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Analysis

Diskriminante

Die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung ist der Term, der in der Mitternachtsformel unter der Wurzel steht, also

$$D = b^2 - 4ac.$$

Anhand der Diskriminante kann man erkennen, wie viele Lösungen die quadratische Gleichung hat.

- Ist die Diskriminante $D > 0$, so gibt es zwei Lösungen.
- Ist die Diskriminante $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung.
- Ist die Diskriminante $D < 0$, so gibt es keine Lösung.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

hat die Diskriminante

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4.$$

Es gilt also $D > 0$ und damit besitzt die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

zwei Lösungen.

2.2 Biquadratische Gleichungen

Quickstart biquadratische Gleichung

- Beispiel: $16x^4 + 3x^2 + 10 = 0$
- Erkennungsmerkmal: Es treten ausschließlich die x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten auf
- Lösungsmethode: Substitution $u = x^2$ und anschließend Mitternachtsformel

2.2.1 Erkennen von biquadratischen Gleichungen

Was ist eine biquadratische Gleichung?

Eine biquadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

für $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.
In einer biquadratischen Gleichung kommen nur x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten vor.

Beispiel: Folgende Gleichungen sind biquadratische Gleichungen, denn es treten lediglich x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten auf:

$$x^4 + 3x^2 + 16 = 0$$
$$13x^4 + 6x^2 + 28 = 0.$$

2.2.2 Lösen von biquadratischen Gleichungen

Substitution – Hintergrundwissen

Um eine biquadratische Gleichung zu lösen, wird eine Substitution durchgeführt. Hierfür wird eine neue Variable, zum Beispiel u wie folgt definiert:

$$u = x^2.$$

Die entstandene Gleichung in u wird gelöst und anschließend wird die Substitution rückgängig gemacht, indem die Lösungen der Gleichung in u wieder in die Gleichung

$$u = x^2$$

eingesetzt werden.

Rezept zur Lösung einer biquadratischen Gleichung

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Schritt 1: Substitution: Setze $u = x^2$, dann gilt:

$$u^2 - 5u - 36 = 0.$$

Schritt 2: Löse die Gleichung (zum Beispiel mit der Mitternachtsformel):

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 36}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = 9, \quad u_2 = -4.$$

Schritt 3: Rücksubstitution: Löse $x^2 = u$, also:

$$u_1 = 9: \quad x^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$

$u_2 = -4: \quad x^2 = -4 \quad \Longrightarrow$ keine weiteren Lösungen.

Für die Lösungsmenge gilt also $\mathcal{L} = \{-3; 3\}$.

Aufgabe 8 – Abi★

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

(b) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^4 + 4x^2 - 4 = 0$

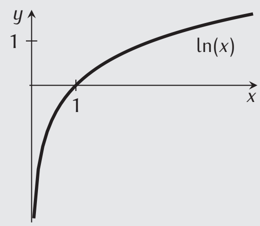
Analysis

3.4.2 Die Logarithmusfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ nennt man (natürliche) **Logarithmusfunktion**.

- Die Logarithmusfunktion ist nur für $x > 0$ definiert.
- Es gelten: $\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $\ln(x) > 0$ für $x > 1$.
- Es gelten: $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
- Für $x \to \infty$ gilt $\ln(x) \to \infty$.
- Für $x \to 0$ gilt $\ln(x) \to -\infty$.



Tipp: Die Logarithmusfunktion wächst für $x \to +\infty$ sehr langsam gegen unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere:

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \to 0 \text{ für } x \to +\infty.$$

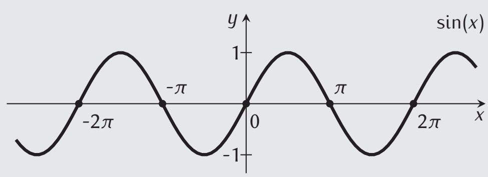
3.5 Trigonometrische Funktionen

3.5.1 Die Sinusfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ nennt man **Sinusfunktion**.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- Die Sinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.
- Die Nullstellen von $\sin(x)$ sind $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ (allgemein: $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$).



Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = \sin(2x + 4\pi)$ im Intervall $[-2\pi; 0)$. Es gilt:

$$\sin(2x + 4\pi) = 0, \quad \text{also} \quad 2x + 4\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$2x = k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

Im Intervall $[-2\pi; 0)$ ist die Menge N der Nullstellen von f also gegeben durch

$$N = \left\{-2\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\pi; -\frac{1}{2}\pi\right\}.$$

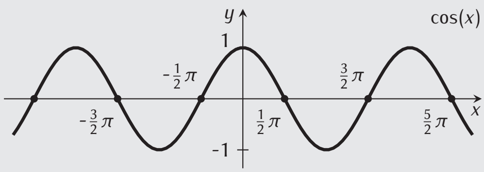
3.5.2 Die Kosinusfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ nennt man **Kosinusfunktion**.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Die Kosinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.
- Die Nullstellen von $\cos(x)$ sind $\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

  $\left(\text{allgemein:} \quad \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.



Tipp: Man erhält den Graphen der Kosinusfunktion, indem der Graph der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben wird:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = 2\cos(x) + 2$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

$$2\cos(x) + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(x) = -1$$
$$\Longrightarrow \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Menge N der Nullstellen von f im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ ist also gegeben durch: $N = \{-\pi; \pi\}$.

Aufgabe 35 – Abi*

Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen:

(a) $f_1(x) = 2\sin(2x) - 2$ (b) $f_2(x) = -1 - \cos(6x)$

Analysis

3.5.3 Sinus/Kosinus-Funktionen skizzieren

Merke

Die allgemeine Sinusfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = a\sin(b(x+c)) + d.$$

- Die **Amplitude** a bestimmt den maximalen Ausschlag der Nulllinie in y-Richtung.
- Die **Periode** b bestimmt die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$.
- Die Phasenverschiebung c bewirkt eine Verschiebung entlang der x-Achse, nach links für $c > 0$ und nach rechts für $c < 0$.
- Der Parameter d bestimmt die Verschiebung in y-Richtung.

Tipp: Dies gilt genau so für die Kosinusfunktion.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

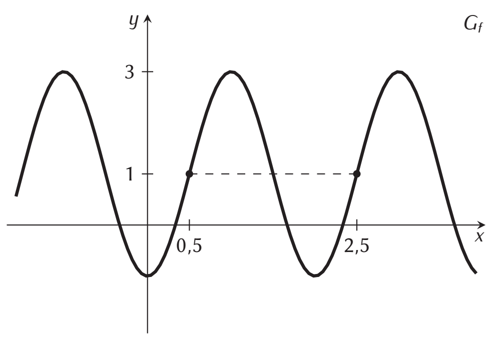
Der Graph G_f der Funktion f soll skizziert werden. Um einen Aufbau der Funktion wie im Merksatz zu erhalten, klammert man zunächst den Faktor vor dem x aus:

$$f(x) = 2\sin\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + 1.$$

Man liest folgende Eigenschaften ab:

- Amplitude: $a = 2$
- Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
- Verschiebung nach rechts: $c = \frac{1}{2}$
- Verschiebung nach oben: $d = 1$.

Man erhält folgende Skizze:



12 Geometrische Objekte

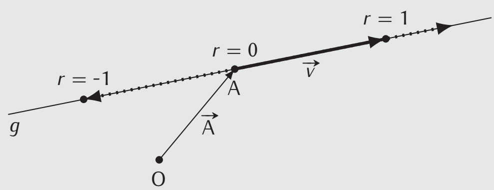
12.1 Geraden

Parameterdarstellung einer Gerade

Eine Gerade wird beschrieben durch

$$g: \vec{x} = \vec{A} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{A}$ wird **Stützvektor** und der Vektor $\vec{v}$ **Richtungsvektor** der Geraden genannt.



Tipp: Häufig wird zur besseren Übersicht keine nähere Angabe zu dem Skalar vor dem Richtungsvektor gemacht. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: $r \in \mathbb{R}$.

Tipp: Die Parameterform einer Geraden ist nicht eindeutig. Die folgenden Geradengleichungen beschreiben dieselbe Gerade:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Der Stützvektor ist der Ortsvektor zum Aufpunkt der Geraden, hier A. Für den Ortsvektor eines Punktes A gibt es mehrere Bezeichnungen, zum Beispiel $\vec{A}$, $\overrightarrow{OA}$ oder auch $\vec{a}$.

Aufgabe 125

Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die jeweils beide Punkte enthält?

(a) $P(1 \mid -2 \mid 0)$, $Q(-3 \mid 4 \mid 5)$

(b) $A\left(-3 \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -2 \,\middle|\, -1\right)$

(c) $R(-2 \mid 1 \mid 5)$, $S(4 \mid 8 \mid -9)$

Aufgabe 126 Abi★★

Gibt es einen Parameter t, so dass die Punkte

$$A(3\,|\,2\,|\,0),\ B(8\,|\,3\,|\,1) \quad \text{und} \quad C\left(-2\,\middle|\,\frac{t}{2}\,\middle|\,-1\right)$$

auf einer Gerade liegen?

12.2 Ebenen

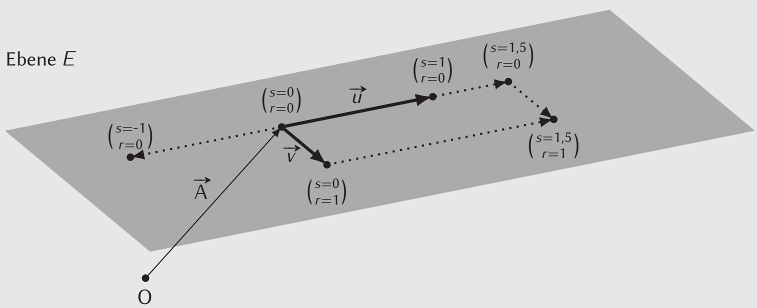
12.2.1 Die Parameterform einer Ebene

Merke

Die Parameterform einer Ebene wird beschrieben durch

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{A}$ ist der **Stützvektor** und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die **Spannvektoren** der Ebene E. Die Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen dabei keine Vielfachen voneinander sein.



Tipp: Häufig wird zur besseren Übersicht keine nähere Angabe zu dem Skalaren vor dem Spannvektoren gemacht. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: $s,t \in \mathbb{R}$.

Tipp: Die Parameterform einer Ebene ist nicht eindeutig. Die beiden folgenden Parametergleichungen beschreiben dieselbe Ebene:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad p,t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 127 – Abi★

Gegeben ist die Ebene

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p,r \in \mathbb{R}.$$

Entscheide, ob folgende Punkte in der Ebene E liegen:

(a) A(2 | 2 | 1)

(b) B(-2 | 3 | -4)

(c) C(-10 | -10 | -5)

Aufgabe 128 – Abi★

Bestimme jeweils eine Parameterform der Ebene, in der die entsprechenden drei Punkte liegen:

(a) A(-2 | 3 | -4), B(0 | 1 | -3), C(1 | 2 | 0)

(b) P(1 | -2 | 3), Q(2 | -4 | 5), R(4 | -5 | 9).

Aufgabe 129 – Abi★

Die x_1,x_2-Ebene beschreibt die Oberfläche eines Grundstücks auf der eine rechteckige Pferdekoppel steht. Diese wird durch die Ecken A(0 | 0 | 0), B(0 | 40 | 0), C(100 | 40 | 0) und D(100 | 0 | 0) begrenzt. Bestimme in einer mathematischen Formel diejenigen Punkte, die innerhalb der Pferdekoppel liegen.

Geometrie

12.2.2 Die Koordinatenform einer Ebene

Merke

Die Koordinatenform einer Ebene E lautet:

$$E:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$$

- Der **Normalenvektor** von $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

  Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene.

- Die **Spurpunkte** sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Durch Berechnung der Spurpunkte lässt sich die Ebene in einem Koordinatensystem darstellen.

Tipp: Koordinatengleichungen, welche dieselbe Ebene beschreiben, sind Vielfache voneinander. Zum Beispiel:

$$E:\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \iff -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12$$

Beispiel: Anhand der Koordinatenform einer Ebene kann man leicht feststellen, ob ein beliebiger Punkt in der gegebenen Ebene liegt oder nicht. Gegeben sind die Ebene E und die Punkte P_1 und P_2 durch:

$$E: \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6,$$
$$P_1(2 \mid 0 \mid 1) \quad \text{und} \quad P_2(2 \mid 1 \mid 1).$$

Nun setzt man die Punkte in die Ebenengleichung ein. Für P_1 gilt:

$$2 \cdot 2 - 0 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 6$$

Für P_2 gilt:

$$2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

Also liegt P_2 in der Ebene, P_1 aber nicht.

Aufgabe 130 Abi★

Ein Stück Pappe wird frontal auf eine spitze Metallstange gesteckt. Die Stange liegt auf der Geraden g mit:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Pappe wird so weit auf die Metallstange geschoben, bis sie den Punkt $P(3 \mid 0 \mid -2)$ beinhaltet. Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in welcher die Pappe liegt.

Aufgabe 131 Abi★

Gegeben sind die Ebene E mit der Koordinatenform $4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ und die Punkte $P_1(3 \mid 0 \mid 7)$ und $P_2(2 \mid 2 \mid 4)$.

(a) Entscheide ob P_1 und P_2 in der Ebene E liegen.

(b) Gib drei weitere Punkte an, die in der Ebene E liegen.

12.2.3 Die Normalenform einer Ebene

Merke

Die Normalenform einer Ebene E lautet:

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Hierbei ist der Vektor $\vec{P}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene E, also zum Beispiel der Ortsvektor des Aufpunkts und der Vektor $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Tipp: Die Normalenform ist nicht eindeutig.

Tipp: Koordinatenform und Normalenform können einfach ineinander überführt werden.

18 Mehrstufige Wahrscheinlichkeiten

18.1 Baumdiagramme

Merke

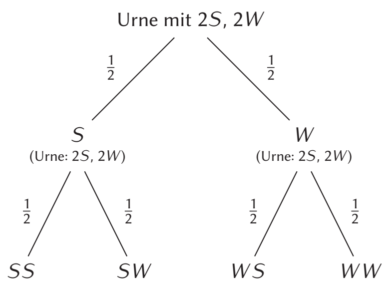
Rechenregeln in einem Baumdiagramm:

- Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu berechnen, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert, der zu dem Ergebnis führt.
- Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so werden die Ergebniswahrscheinlichkeiten der betreffenden Pfade addiert.

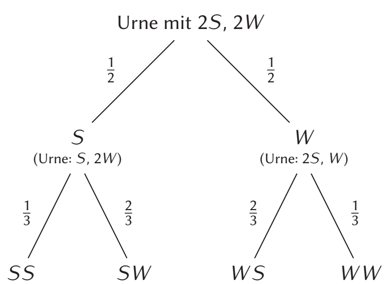
Tipp: Im Prinzip lässt sich jedes mehrstufige Wahrscheinlichkeitsproblem durch ein Baumdiagramm lösen, allerdings eignen sich Baumdiagramme nur für einfachere Probleme, weil sie sehr schnell sehr unübersichtlich werden.

Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.

- Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



- Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Betrachte das Ereignis

E : Es werden eine schwarze (S) und eine weiße (W) Kugel gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt

- beim Ziehen mit Zurücklegen:

$$P(E) = P(SW) + P(WS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(E) = P(SW) + P(WS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 179 – Abi★

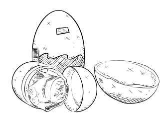
In einer Urne befinden sich fünf blaue, drei rote und zwei gelbe Kugeln.

(a) Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Kugeln verschiedene Farben haben? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die gleiche Farbe haben?

(b) Ohne Zurücklegen werden drei Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Kugeln verschiedene Farben haben? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die gleiche Farbe haben?

Aufgabe 180 – Abi★★

Kevins Mutter arbeitet in einer Fabrik für Überraschungseier. Eines Abends bringt sie 10 Überraschungseier mit nach Hause. Sie weiß, dass sich in drei der Eier ein Bausatz, in zwei der Eier ein kleines Puzzle und in den restlichen Eiern eine Spielfigur befinden.



Kevin darf sich dreimal nacheinander ein Ei nehmen und öffnen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) Alle Überraschungen sind vom Typ her verschieden.

(b) Alle Überraschungen sind vom Typ her gleich.

(c) Die ersten beiden Eier enthalten jeweils eine Spielfigur.

(d) In keinem Ei ist eine Spielfigur.

(e) Genau zwei aufeinanderfolgende Eier enthalten jeweils eine Spielfigur.

(f) Keines der gewählten Eier enthält ein Puzzle.

Aufgabe 181 – Abi★★★

Auf einem Tisch stehen zwei Urnen U_1 und U_2, in denen sich Kugeln folgender Farben befinden:

U_1 : 2 schwarze, 2 weiße, 2 grüne

U_2 : 4 schwarze, 2 weiße.

Aus U_2 werden zwei Kugeln entnommen und in U_1 gelegt. Daraufhin wird eine Kugel aus U_1 entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel…

(a) … grün ist.

(b) … weiß ist.

(c) … schwarz ist.

Aufgabe 197

Ein Bogenschütze trifft das Zentrum der Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$. Während einer Trainingseinheit schießt er fünfzig Pfeile auf die Zielscheibe.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass er genau 15-mal trifft?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass er höchstens 15-mal trifft?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, dass er mindestens 13-mal trifft?

(d) Wie wahrscheinlich ist es, dass er mehr als 16-mal und höchstens 21-mal trifft?

(e) Wie wahrscheinlich ist es, dass er beim 14. und beim 17. Mal trifft?

(f) Gib ein Argument an, welches gegen eine Verwendung der Binomialverteilung bei dieser Bogenschützenaufgabe spricht.

Aufgabe 198

Zwanzig Prozent der Menschen in Deutschland, die älter als vierzig Jahre sind, können sich etwas unter dem Begriff „Hashtag“ vorstellen. Man wählt zufällig eine Gruppe von 20 dieser Menschen aus.

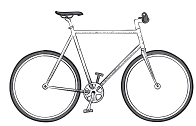
(a) Warum kann man bei dieser Aufgabenstellung nur näherungsweise von einer Binomialverteilung ausgehen?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich mindestens vier dieser Menschen etwas unter dem Begriff vorstellen können?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich mindestens neun und höchstens siebzehn dieser Menschen nichts unter dem Begriff vorstellen können?

Aufgabe 199 – 🖩 Abi★★

In der Stadt Fietshausen wird bekanntlich viel Fahrrad gefahren. Laut einer Statistik eines deutschlandweiten Fahrradclubs sind ein Drittel aller Fahrräder in Deutschland codiert, d. h. mit einem Code versehen, welcher der Polizei Auskunft über den Besitzer gibt, um es bei Diebstahl wiederfinden zu können.



Der Fahrradverband Fietshausen möchte in Zusammenarbeit mit der örtlichen Polizei mit einer Aktion auf die Vorteile einer Codierung aufmerksam machen und führt an einer Hauptstraße eine 3-stündige Kontrolle durch. Hierbei werden 100 Fahrräder gesichtet.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 33 der gesichteten Fahrräder codiert sind. Bestimme zudem die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 50 Fahrräder codiert sind.

(b) Bei der Kontrolle besteht die Möglichkeit, das Fahrrad direkt im Anschluss codieren zu lassen. Bei einer ähnlichen Aktion in der ebenso fahrradbegeisterten Nachbarstadt Velokirchen wurde die Erfahrung gemacht, dass 50 % der kontrollierten Fahrradfahrer, die keine Codierung haben, dieses Angebot in Anspruch nehmen. Mit wie vielen Neucodierung kann die Polizei im Schnitt bei solch einer Kontrolle rechnen?

20.3 3M-Aufgaben

3M-Aufgabe

Beispiel: Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Chance von 5 %. Wie oft muss man *mindestens* spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von *mindestens* 99 % *mindestens* einmal zu gewinnen?

Schritt 1: Schreibe die Aufgabe als Formel auf:

$$P_n(\text{mindestens 1 Treffer}) \geq 0{,}99.$$

Schritt 2: Gehe zum Gegenereignis über. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen um:

$$P_n(\text{kein Treffer}) \leq 0{,}01.$$

Schritt 3: Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P_n(\text{kein Treffer}) = (1 - 0{,}05)^n.$$

Schritt 4: Setze die Gleichung und die Ungleichung zusammen. Es soll also gelten:

$$(1 - 0{,}05)^n \leq 0{,}01.$$

Löse diese Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach *n* auf. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen beim Teilen durch $\ln 0{,}95$ erneut um:

$$\begin{aligned} 0{,}95^n \leq 0{,}01 \quad &\Longrightarrow \quad \ln\left(0{,}95^n\right) \leq \ln 0{,}01 \\ &\Longrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}95 \leq \ln 0{,}01 \\ &\overset{\ln 0{,}95<0}{\Longrightarrow} \quad n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} \approx 90. \end{aligned}$$

Man muss mindestens 90 mal spielen.

Aufgabe 200 – ▦ Abi★★

Radfahrer nehmen es oft mit den Verkehrsregeln nicht so genau. Besonders Till nicht. Er hat gelesen, dass Radfahrer nur in einem Prozent der Fälle erwischt werden, wenn sie bei Rot über die Ampel fahren.

(a) Pro Monat überquert er 50 rote Ampeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er im nächsten Monat
- genau zweimal
- mindestens dreimal

erwischt.

(b) Einmal hatte Till Pech und kassierte 60 € Bußgeld und einen Punkt in Flensburg. In Zukunft möchte er klüger vorgehen. Wie oft darf er monatlich höchstens über Rot fahren, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von maximal 20 % mindestens einmal im Monat erwischt wird?

22 Hypothesentest

22.1 Grundidee

Merke

Eine Hypothese H_0 (**Nullhypothese**) ist eine Behauptung, die aufgrund einer Beobachtung abgelehnt oder angenommen werden soll.

Beispiel: Folgende Aussage ist eine typische Nullhypothese.

H_0: Bei 70 % aller Klassenarbeiten wird abgeschrieben.

Diese Aussage kann angenommen (für wahr befunden) oder abgelehnt (für falsch befunden) werden.

Merke

Bei einem Hypothesentest können folgende Konstellationen auftreten:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Annahmebereich von H_0.	Richtige Entscheidung (H_0 ist wahr und die Hypothese wird angenommen.)	Falsche Entscheidung (H_0 ist falsch, aber die Hypothese wird angenommen.) Dies entspricht einem **Fehler zweiter Art**.
Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Ablehnungsbereich von H_0	Falsche Entscheidung (H_0 ist korrekt, aber die Hypothese wird abgelehnt.) Dies entspricht einem **Fehler erster Art**.	Richtige Entscheidung (H_0 ist falsch und die Hypothese wird abgeleht.

Merke

Bei Annahme oder Ablehnung einer Nullhypothese können zwei Arten von Fehlern auftreten:

- **Fehler 1. Art (α-Fehler):** H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 richtig ist. Beispiel:
  H_0: Der Würfel ist fair.
  Es wird sieben Mal hintereinander eine Sechs gewürfelt. Daraufhin wird der Würfel entsorgt, weil er angeblich gezinkt ist. In Wahrheit war es aber nur Zufall.
- **Fehler 2. Art (β-Fehler):** H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_0 falsch ist. Beispiel:
  H_0: Der Würfel ist fair.
  Bei sieben Würfen wurde zweimal die Sechs gewürfelt. Der Würfel wird behalten, obwohl er in Wahrheit gezinkt ist.

Merke

- Ein **Hypothesentest** ist ein standardisiertes Verfahren zur Überprüfung einer Nullhypothese H_0.
  - Dieser beinhaltet eine **Entscheidungsregel**, die im Vorfeld eines Experiments angibt, bei welchen Beobachtungen die Hypothese H_0 angenommen bzw. abgelehnt wird.
  - Das **Signifikanzniveau** (α-Niveau) eines Hypotesentest ist dabei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art.

Tipp: Bei einem Hypothesentest möchte man im Normalfall die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art minimieren.

Beispiel: Amazon behauptet, dass 90 % aller Bestellungen am nächsten Tag versendet werden. Der Verantwortliche für Qualitätssicherung möchte diese Behauptung überprüfen und geht dabei nach der folgenden Entscheidungsregel vor:

- 10 000 zufällig ausgewählte Bestellungen werden beobachtet.
- Falls davon 1050 oder weniger Bestellungen nicht am nächsten Tag versendet werden, dann ist alles in Ordnung.
- Falls 1051 oder mehr Bestellungen nicht am nächsten Tag versendet werden, dann ist die Behauptung nicht tragbar und Amazon kann die Hypothese nicht mehr geglaubt werden.

22.2 Testen von Hypothesen

22.2.1 Die Nullhypothese und die Alternativhypothese

Wie bestimmt man die Nullhypothese?

Grundlage eines Hypothesentests ist die Nullhypothese H_0, welche auch häufig die Ausgangshypothese ist. Diese soll abgelehnt bzw. befürwortet werden und steht im Gegensatz zur Alternativhypothese H_1. Die Alternativhypothese wird bei Ablehnung von H_0 angenommen und umgekehrt.
Falls man wissenschaftlich arbeitet, gilt in der Regel: Hat man eine Vermutung, so stellt deren Aussage die Alternativhypothese dar, denn a priori kann nicht davon ausgegangen werden, dass diese Vermutung richtig ist. Gewissermaßen ist man gegenüber den „Befürwortern der Nullhypothese“ in der Beweispflicht, dass deren Aussage nicht korrekt sein kann.
Ansonsten gibt auch häufig die Bedeutung des Fehlers erster Art einen Hinweis auf die Wahl der Nullhypothese. Denn dessen Wahrscheinlichkeit wird ja gerade über das Signifikanzniveau gesteuert. Man wählt die Nullhypothese also gerade so, dass der Fehler erster Art bei dieser Konstellation der „schlimmere“ Fehler ist.
Die Wahl von Nullhypothese und Alternativhypothese hängt also stark vom Sachzusammenhang ab. In Aufgaben, in denen aus dem Zusammenhang nicht klar hervorgeht, welche Aussage die Nullhypothese ist, wird die Nullhypothese in der Aufgabenstellung angegeben.

Tipp: Beim wissenschaftlichen Arbeiten ist die Beweisführung quasi verdreht: Man nimmt nicht an, dass die Vermutung wahr ist und zeigt dies, sondern man nimmt an, dass diese Vermutung falsch ist und untersucht anschließend, ob die Ergebnisse der Stichprobe eine Gültigkeit der Nullhypothese H_0 zulassen oder ausschließen.

Beispiel: Ein Pharmakonzern entwickelt ein neues Medikament zur Behandlung von Alzheimer und testet dieses zunächst in einem Tierversuch an 1000 Ratten. Im Anschluss dürfen keine klinische Studien durchgeführt werden, wenn im Tierversuch mindestens 3,5 % der Ratten schwerwiegende Nebenwirkungen zeigen. Gesucht ist nun eine Entscheidungsregel für die Durchführung der klinischen Studie.

Der Pharmakonzern hat großes Interesse an der klinischen Studie. Denn die Entwicklung des Medikaments war teuer und die Aussicht auf ein profitables Geschäft ist groß. Der gewünschte Ausgang der Stichprobe ist für den Pharmakonzern also, dass weniger als 3,5 % der Ratten schwerwiegende Nebenwirkungen zeigen. Die Alternativhypothese lautet somit für die Wahrscheinlichkeit p, dass die Ratten schwerwiegende Nebenwirkungen zeigen:

$$H_1 : \; p < 0{,}035.$$

Jetzt kann leicht die Nullhypothese bestimmt werden, diese lautet:

$$H_0 : \; p \geq 0{,}035.$$

Mit dieser Nullhypothese kann nun mit noch zu bestimmendem Signifikanzniveau eine Entscheidungsregel gefunden werden. Die Konsequenz eines Irrtums ist hier: Ein Medikament mit potentiell schwerwiegenden Nebenwirkungen wird in einer klinischen Studie an Menschen getestet, dies möchte der Pharma-Konzern natürlich verhindern.

Eine Reihe von Gegnern des Pharmakonzerns wirft diesem vor, rein wirtschaftliche Interessen zu haben und glaubt, dass das Medikament in mehr als 3,5 % aller Fälle schwerwiegende Nebenwirkungen zur Folge hat. Die Gegner möchten also eine klinische Studie verhindern und ihre Alternativhypothese lautet:

$$H_1 : \; p > 0{,}035.$$

Jetzt kann leicht die Nullhypothese bestimmt werden, diese lautet:

$$H_0 : \; p \leq 0{,}035.$$

Nun kann auch hier wieder mit gegebenem Signifikanzniveau eine Entscheidungsregel bestimmt werden. Die Konsequenz eines Irrtums ist hier: Ein potentiell gutes Medikament wird nicht weiter getestet.

Die Wahl von Nullhypothese und Alternativhypothese hängt also entscheidend vom Sachzusammenhang ab.

Aufgabe 203

Ein Pharmakonzern hat ein neues Medikament zur Bekämpfung von Lymphdrüsenkrebs entwickelt. Laut Firmenaussagen ist der Anteil der Patienten mit Nebenwirkungen unter 15 %. Bestimme die Nullhypothese aus Sicht des Pharmakonzerns.

Aufgabe 204

Das Amerikanische Eichhörnchen ist in Europa nicht heimisch. Es wurde jedoch an vielen Stellen Großbritanniens eingeführt und verdrängt dort das einheimische Eurasische Eichhörnchen.
In Wales geht man davon aus, dass die Amerikanischen Eichhörnchen aktuell maximal 20 % der gesamten Eichhörnchenpopulation ausmachen. Freiwillige Helfer bekommen den Auftrag, in den Wäldern Wales insgesamt 100 Eichhörnchen zu sichten und zu notieren, ob es sich um ein Amerikanisches oder ein Eurasisches Eichhörnchen handelt. Auf Basis dieser Erhebung soll zu einem Signifikanzniveau von 2,5 % getestet werden, ob man weiterhin davon ausgehen kann, dass maximal 20 % der gesamten Eichhörnchenpopulation Amerikanische Eichhörnchen sind.

(a) Formuliere die Nullhypothese.

(b) Welche der folgenden Entscheidungsregeln bildet den beschriebenen Hypothesentest sinnvoll ab? Begründe ohne zu rechnen.

- Wenn 28 oder weniger Amerikanische Eichhörnchen gesichtet werden, wird H_0 verworfen, sonst beibehalten.
- Wenn 29 oder mehr Amerikanische Eichhörnchen gesichtet werden, wird H_0 verworfen, sonst beibehalten.
- Wenn 18 oder weniger Amerikanische Eichhörnchen gesichtet werden, wird H_0 beibehalten, sonst verworfen.

Aufgabe 205 Abi***

Ein Hypothesentest mit der Nullhypothese

$$H_0 : p \leq 0{,}2$$

soll mehrfach durchgeführt werden.

(a) Angenommen, man erhöht das Signifikanzniveau von 2,5 % auf 10 %. Wird der Ablehnungsbereich von H_0 größer oder kleiner? Begründe ohne zu rechnen.

(b) Angenommen, zu einem gewissen Signifikanzniveau liegt der Ablehnungsbereich für H_0 bei $k \in \{29; 30; \ldots; 100\}$. Wähle aus den folgenden Antwortmöglichkeiten den Ablehnungsbereich für H_0 aus, den man beim selben Signifikanzniveau und einer Stichprobe von 1000 erhalten würde. Begründe deine Antwort ohne zu rechnen.

- $k \in \{29; 30; \ldots; 1000\}$
- $k \in \{290; 291; \ldots; 1000\}$
- $k \in \{226; 227; \ldots; 1000\}$
- $k \in \{317; 318; \ldots; 1000\}$

Lösung 33

(a) Für die Funktion f gilt: $f(0) = 1$. Damit kann nur der Graph (IV) zur Funktion f gehören.

(b) Für die Funktion g gilt: $g(0) = 2$.

Damit können nur die Graphen (II) oder (III) zur Funktion g gehören. Desweiteren gilt für die Ableitung von g:

$$g'(x) = -6x^2 e^{-x^3}.$$

Damit nimmt die Funktion g' nur negative Werte an. Der Graph von g ist also monoton fallend. Somit kann zur Funktion g nur der Graph (III) gehören.

(c) Für die Funktion h gilt: $h(0) = 2$.

Damit können nur die Graphen (II) oder (III) zur Funktion h gehören. Der Graph (III) gehört zur Funktion g, damit kann nur der Graph (II) zur Funktion h gehören.

☞ *Alternative:* Desweiteren gilt für die Ableitung von h:

$$h'(x) = 40x^4 e^{x^5}.$$

Damit nimmt die Funktion h' nur positive Werte an. Der Graph von h ist also monoton steigend. Somit kann zur Funktion h nur der Graph (II) gehören.

(d) Es ist $i(x) < 0$ für alle x. Daher gehört zur Funktion i der Graph (I).

Lösung 34

(a) Für $x \to +\infty$ gehen x^2 und e^x gegen unendlich. Also:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty.$$

Für $x \to -\infty$ geht e^x jedoch schneller gegen 0 als x^2 gegen unendlich. Also gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

(b) Es ist

$$g(x) = \frac{x^{200}}{e^{-x}} = x^{200} e^x.$$

Da e^x dominiert, folgt wie in Teil (a): $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

(c) Da $e^{-x} \to 0$ für $x \to +\infty$ gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} x - e^{-x} = +\infty.$$

Für $x \to -\infty$ wächst e^{-x} sehr schnell gegen Unendlich. Also:

$$\lim_{x\to-\infty} x - e^{-x} = -\infty.$$

(d) Es ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Lösung 35

(a) $$2\sin(2x) - 2 = 0 \implies \sin(2x) = 1 \implies 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) $$-1 - \cos(6x) = 0 \implies \cos(6x) = -1 \implies 6x = -\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \implies x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösung 36

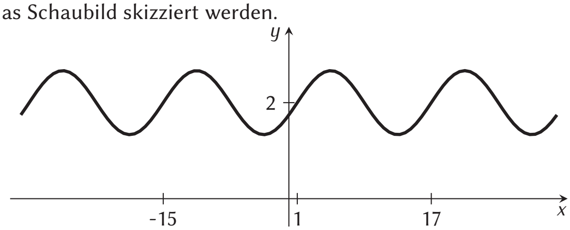
(a) Bringe den Funktionsterm zunächst auf die Standardform:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}(x-1)\right) + 2.$$

Nun kann abgelesen werden:

- Amplitude: $\frac{2}{3}$
- Periodenlänge: 16
- Verschiebung nach rechts: 1
- Verschiebung nach oben: 2

Nun kann das Schaubild skizziert werden.



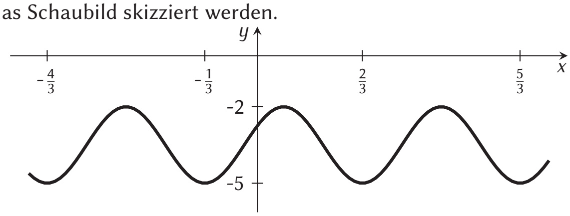
(b) Bringe den Funktionsterm zunächst auf die Standardform:

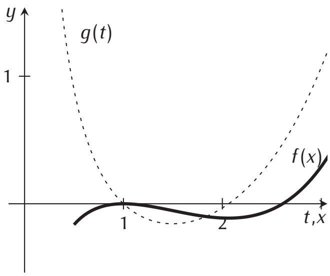
$$f(x) = -1{,}5\cos\left(2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) - 3{,}5.$$

Nun kann abgelesen werden:

- Amplitude: 1,5
- Periodenlänge: 1
- Verschiebung nach links: $\frac{1}{3}$
- Verschiebung nach unten: 3,5

Nun kann das Schaubild skizziert werden.



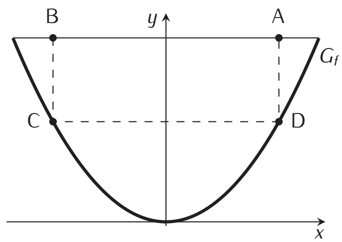


Lösung 91

Der Rand der Pappe kann beschrieben werden durch die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

➤ *Skizze*

Im folgenden Schaubild sind der Graph G_f der Funktion f und das einbeschriebene Rechteck dargestellt.



An der Zeichnung lässt sich erkennen, dass für die Koordinaten des rechteckigen Pappstückes gilt:

$$A(\,x \mid 24\,)\,,\, B(\,-x \mid 24\,)\,,\, C(\,-x \mid f(-x)\,)\,,\, D(\,x \mid f(x)\,)\,.$$

➤ *Variable*

Die Variable x beschreibt das Problem vollständig.

➤ *Definitionsbereich*

Der Definitionsbereich von x wird durch die Maße der Pappe vorgegeben:

$$-\sqrt{24} \leq x \leq \sqrt{24}.$$

Bei dieser Aufgabe sind die Definitionsränder nicht interessant, da sich an diesen ein Rechteck mit Seitenlänge 0, also eine Linie ergibt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist gegeben durch:

$$A = a \cdot b.$$

Aus den Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks lassen sich die Seitenlängen ablesen:

$$a = 2x$$

$$b = 24 - f(x).$$

Die Zielfunktion A der Rechtecksfläche ist dann gegeben durch

$$A(x) = 2x(24 - f(x)) = 2x(24 - x^2) = -2x^3 + 48x.$$

➤ *Extremwertbestimmung*

Hierzu werden zunächst die Ableitung A' der Funktion A und deren Nullstellen bestimmt.

Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

$$A'(x) = -6x^2 + 48 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen G_f genügt es, nur die positive Lösung weiterzuverfolgen:

$$A''(2\sqrt{2}) = -12 \cdot 2\sqrt{2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}\left(2 \cdot \sqrt{2} \,\middle|\, 64\sqrt{2}\right).$$

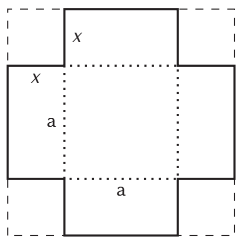
Die Pappe hat für die Punkte

$$\mathrm{A}\left(2\sqrt{2} \,\middle|\, 24\right), \mathrm{B}\left(-2\sqrt{2} \,\middle|\, 24\right), \mathrm{C}\left(-2\sqrt{2} \,\middle|\, 8\right), \mathrm{D}\left(2\sqrt{2} \,\middle|\, 8\right)$$

den maximalen Flächeninhalt von $A = 64\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$ und die Maße lauten hierbei 16 cm auf $4\sqrt{2}$ cm.

Lösung 92

➤ *Skizze*



➤ *Variable*
Die Seitenlänge der auszuschneidenden Quadrate wird mit x bezeichnet. Diese Variable beschreibt das Problem vollständig.
➤ *Definitionsbereich*
Es gilt: $0 \leq x \leq 12$. Die Randwerte sind im Sachzusammenhang uninteressant, weil bei $x = 0$ gar keine Quadrate herausgeschnitten werden und somit keine Schachtel entstehen kann. Für $x = 12$ wird das ganze vorhandene Quadrat in 4 gleichgroße Quadrate geschnitten, auch hier entsteht keine Schachtel. Das Volumen V der Schachtel mit gegebener Kantenlänge a und entstehender quadratischer Grundfläche ist gegeben durch:

$$V = a^2 \cdot x.$$

Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche erhält man, wenn man von der ursprünglichen Seitenlänge von 24 cm an beiden Seiten die Länge der Seitenlänge der herauszuschneidenden Quadrate abzieht:

$$a = 24 - 2x$$

Eine Gleichung der Zielfunktion V ist also gegeben durch:

$$V(x) = (24 - 2x)^2 x = 4x^3 - 96x^2 + 576x.$$

➤ *Extremwertbestimmung*
Hierzu werden zunächst die Ableitung V' der Funktion V und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

$$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 4, x_2 = 12$$
$$V''(4) = -96 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt } \mathrm{H}(4 \mid 1024)$$

Die zweite Lösung $x_2 = 12$ kann kein Maximum sein - bei 24 cm Kantenlänge kann man